Grundlagen

1. Aufgabe:

Formuliere folgende Aussagen mittels Quantoren und negiere sie. Bestimme, welche der Aussagen wahr und welche falsch sind.

a) Für jede ganze Zahl k gibt es eine natürliche Zahle n so, dass k geteilt durch n negativ ist.

b) Es existiert ein n aus den natürlichen Zahlen und ein k aus den ganzen Zahlen, die multipliziert -3 ergeben.

2. Aufgabe:

Beweise jeweils folgende Aussagen für $n \in \mathbb{N}$:

a) $3^{2n+4} - 2^{n-1}$ ist durch 7 teilbar.

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{k+2}{k} = \binom{n+3}{n}$

3. Aufgabe:

Seien $u, v \in \mathbb{C}$ mit $u = 2i - 5, v = 7 - 3i$. Berechne $u + v,\ u \cdot v,\ \frac{u}{v}$.

4. Aufgabe:

Skizziere folgende Mengen:

a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - i| = 3\}$

b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\mathrm{Re}(z)| \leq 2, -1 \leq \mathrm{Im}(z) < 1\}$

5. Aufgabe:

Gib jeweils an, ob es sich bei den folgenden Mengen um eine Äquivalenz- oder Ordnungsrelation handelt oder um keins von beidem handelt. Beweise deine Behauptungen!

a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ x + y = 2x\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ x + y \text{ ist eine gerade Zahl}\}$

6. Aufgabe:

Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche die (Un-)Gleichungen erfüllen.

a) $|3x - 9| - |2x| = 14$

b) $|x - 5| + |x^2 - 4x| > 13$

7. Aufgabe:

Bestimme, ob die Mengen nach oben oder nach unten beschränkt sind. Bestimme gegebenenfalls das Infimum bzw. Supremum und entscheide, ob es sich um das Minimum bzw. Maximum handelt.

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } \ x = \frac{1}{n+2}\}$

b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + x + 1 > 3 \text{ und } \ x < 0\}$

Folgen

1. Aufgabe:

Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_1 := 0$ und $a_{n+1} := 1 - \frac{1}{2+a_n}$.

Prüfe die Zahlenfolge (a_n) auf Monotonie, Beschränktheit, sowie Konvergenz und berechne im Falle der Konvergenz einen Grenzwert.

2. Aufgabe:

Welche der angegebenen Zahlenfolgen sind konvergent?

a) $a_n := \sqrt{3n+6} - \sqrt{3n+1}$

b) $b_n := (-1)^n nsin(n)$

c) $c_n := \frac{n^2+\sqrt{5^n}}{3^n+1}$

d) $d_n := \frac{6n^3+1}{n^3-n+6}$

e) $e_n := \frac{3^n}{n!}$

3. Aufgabe:

Bestimme alle Häufungspunkte der nachfolgenden Zahlenfolgen:

a) $a_n := \frac{1+(-7)^n}{7^n}$

b) $b_n := \frac{(-1)^n n^6+3n-2}{6^n+5}$

c) $c_n := (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...)$ (jeweils Gruppen der natürlichen Zahlen von 1 bis k, wobei sich k nach jeder Gruppe um 1 erhöht.

d) $d_n := (\frac{n-1}{n})^{6n}$

e) $e_n := \frac{3^n}{n!}$

f) $f_n := i^n + (-1)^n$

4. Aufgabe:

Zeige, dass die durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := a_n^2 + a_n$ definierte Folge keine Cauchy-Folge ist. Ist die Folge konvergent?

5. Aufgabe: (*nur für Bachelor*)

Beweise die folgenden Aussagen.

- ☐ (a_n) konvergiert genau dann gegen a, wenn $(a_n - a)$ gegen 0 konvergiert.
- ☐ Wenn a_n gegen a und $b_n - a_n$ gegen 0 konvergiert, so konvergiert auch b_n gegen a.

6. Aufgabe:

Welche Aussage ist richtig? Finde für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel und beweise richtige Aussagen.

- ☐ Seien $(a_n), (b_n)$ beschränkte Zahlenfolgen. Dann ist $(a_n b_n)$ beschränkt.
- ☐ Jede beschränkte Folge ist konvergent.
- ☐ Eine Zahlenfolge, die nur positive Folgenglieder hat und gegen Null konvergiert, ist stets monoton fallend.
- ☐ Jede konvergente Folge ist monoton.
- ☐ Liegen in jeder ε-Umgebung um c unendlich viele Folgenglieder der Folge (a_n), so konvergiert diese gegen c.
- ☐ Für alle $\varepsilon > 0$ existieren nur endlich viele k mit $|a_k - c| > \varepsilon$. Dann konvergiert (a_n) gegen c.
- ☐ Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Zahlenfolgen. Konvergiert (a_n) gegen 0, so konvergiert $(a_n)(b_n)$ gegen 0.

Reihen

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

Ein Turm wird aus Würfeln errichtet, die aufeinander gestapelt werden. Die Seitenlänge des untersten Würfels beträgt 1 m, die des nächsten $\frac{1}{2}$ m, dann $\frac{1}{3}$ m, $\frac{1}{4}$ m und immer so weiter.

a) Beschreibe die Höhe des Turms als Reihe und untersuche diese auf Konvergenz. Gibt es einen Kran der groß genug ist, um den Turm zu errichten?

b) Die Vorderseite des Turms soll rot gefärbt werden. Beschreibe die Fläche einer Seite als Reihe und untersuche diese auf Konvergenz. Gibt es genug rote Farbe, um die Seite zu färben?

2. Aufgabe: (*Konvergenzkriterien*)

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}((-1)^{k+1}+1)2^{-k}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

e) Nur für Bachelor: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n+2}{6n+2}\right)^{(-1)^n n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)+1}{n^2}$

g) Die Folge (a_n) der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ sei rekursiv definiert durch: $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{3a_n + a_n^2}{1+a_n}$

h) Nur für Bachelor: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

3. Aufgabe: (*Reihenwerte*)

Bestimme die Reihenwerte von 2. c) und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

4. Aufgabe:

Bestimme die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, so dass die Reihe konvergiert

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}(x+1)^k$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} x^{2k}$

5. Aufgabe: (*Cauchy-Produkt/Faltungsreihe*)

Sei $a_n := b_n := \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

a) Untersuche $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

b) Konvergiert die Reihe über $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$?

Funktionen

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

Bearbeite die drei Aufgaben unten auf dem Blog:
https://blogs.urz.uni-halle.de/mathetreffanalysis/injektiv-surjektiv-oder-doch-bijektiv/

2. Aufgabe: (*Injektivität und Surjektivität*)

Sei $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $(g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in X$

a) Zeige, dass f injektiv und g surjektiv ist.

b) Gib ein Beispiel an, so dass f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.

3. Aufgabe: (*Stetigkeit*)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachte die Funktion

$$h_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h_a(x) = \begin{cases} \frac{|x|+2}{|x|+a} & : x \neq 0 \\ b & : x = 0 \end{cases}$$

a) Für $a \neq 0$ untersuche h_a auf Stetigkeit in Abhängigkeit von b.

b) **Zusatz:** Jetzt sei $a = 0$. Gibt es ein $b \in \mathbb{R}$ so, dass h_a in $x_0 = 0$ stetig ist?

4. Aufgabe:

Die folgenden Aufgaben haben etwas gemeinsam. Aber was? ;)

a) Zeige: $\exists x \in (0, 1) : sin(2x) = \frac{1}{x+3}$

b) Untersuche, ob es in den positiven reellen Zahlen Lösungen gibt für: $e^{\sqrt{x}} = sin(x) + 2$

c) Untersuche, ob die folgenden beiden Funktionen einen Schnittpunkt (x,y) mit $x > 0$ haben:
$f(x) = e^{\sqrt{x}}, \quad g(x) = -cos(x)$

5. Aufgabe: (*Nur für Bachelor*)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion (nicht unbedingt differenzierbar). Zeige, dass

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \cdot f(x)$$

in $x = 0$ differenzierbar ist.

b) Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt

$$\log(1 + x) > \frac{x}{1 + x}.$$

Topologie, Taylor, Integrale (Bachelor only)

1. Aufgabe:

a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Definiere das Innere und den Rand von A.

b) Gib ein Beispiel für einen metrischen Raum (X, d) und eine nichtleere Menge mit leerem Inneren an.

c) Gib das Innere und den Rand von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ an. (Mit Begründung)

d) Ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ offen oder abgeschlossen?

2. Aufgabe:

Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Definiere den Begriff der Folgenkompaktheit für eine Teilmenge $A \subset X$.

b) Ist $\mathbb{R}$ folgenkompakt? Begründe!

c) Sei $A \subset X$ eine Teilmenge und $f : A \to X$ stetig. Zeige, dass falls A folgenkompakt ist, dann auch $f(A)$ folgenkompakt ist.

3. Aufgabe:

a) Definiere den Begriff der Kontraktion.

a) Formuliere den Banachschen Fixpunktsatz.

a) Zeige mittels des Fixpunktsatzes, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \log(1 + \arctan^2(x))$$

in $[0, 1]$ genau einen Fixpunkt besitzt. Welche Voraussetzungen müssen dafür geprüft werden?

4. Aufgabe: (*Taylor*)

a) Sei $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \log(\cos(x))$ gegeben. Bestimme ein Polynom p vom Grad zwei, sodass

$$f(x) = p(x) + R_2(x, 0),$$

wobei $R_2(x, 0)$ das Restglied von Lagrange in $x_0 = 0$ sein soll.

b) Beweise mit der Formel von Taylor in $x_0 = 0$, dass für alle $x \in (0, 1)$ gilt

$$\sin(x) < x.$$

5. Aufgabe: (*L'Hospital*)

a) Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$$

b) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, sodass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

stetig ist?

6. Aufgabe: (*Riemann-Integrale*)

a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Definiere die Begriffe *Zerlegung* Z von $[a, b]$, *Ober*- und *Untersumme* von f bezüglich Z. Wann ist f *Riemann-integrierbar*?

b) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende, stetige Funktion und

$$Z = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

eine Zerlegung von $[0, 1]$ mit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Beweise

$$O(Z, f) - U(Z, f) = \frac{f(1) - f(0)}{n}$$

Warum ist f Riemann-integrierbar?